

ANALISIS KEMAMPUAN MEMBACA BUKTI MATEMATIS PADA MATA KULIAH STATISTIKA MATEMATIKA

Oleh:

Andri Suryana

Universitas Indraprasta PGRI Jakarta
andri_16061983@yahoo.com

ABSTRAK

Statistika Matematika merupakan salah satu mata kuliah yang dianggap sulit oleh mahasiswa sehingga dibutuhkan kemampuan-kemampuan matematis untuk mempelajarinya. Salah satu kemampuan yang diperlukan untuk mempelajari mata kuliah tersebut adalah kemampuan membaca bukti matematis. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis kemampuan membaca bukti matematis mahasiswa pada Mata Kuliah Statistika Matematika. Metode penelitian yang digunakan adalah metode kualitatif. Adapun hasil analisis terhadap kemampuan membaca bukti matematis mahasiswa pada mata kuliah Statistika Matematika di salah satu universitas swasta di Jakarta Timur terlihat bahwa mahasiswa masih mengalami kesulitan dalam memeriksa kebenaran dan menuliskan konsep yang digunakan dalam tiap langkah pembuktian. Untuk mata kuliah prasyarat pun mereka masih belum paham. Ini merupakan salah satu faktor yang membuat kemampuan membaca bukti matematis mahasiswa kurang baik. Berdasarkan hasil penelitian, terlihat bahwa kemampuan membaca bukti matematis mahasiswa pada mata kuliah Statistika Matematika tergolong masih kurang baik.

Kata Kunci : Kemampuan Membaca Bukti Matematis, Statistika Matematika

ABSTRACT

Mathematical Statistics is one of the course that are considered difficult, so students need mathematical skills to learn it. One of the skills required to learn that course is skill to read mathematical proof. The aims of this research is analyzing of the skill to read mathematical proof in Mathematical Statistics Course. The method used is qualitative. The results of the analysis of skill to read mathematical proof in Mathematical Statistics courses at one of the private universities in East Jakarta is seen that students are still difficulties in checking the truth and write the concepts used in each step of proof. For any prerequisite course, they still do not understand. This is one of the factors that make a student's skill to read mathematical proof is not good. Based on this research, it appears that the skill to read mathematical proof of students on Mathematical Statistics course is still not good.

Keywords: skill to read mathematical proof, Mathematical Statistics

I. PENDAHULUAN

1. Latar Belakang

Materi matematika untuk level perguruan tinggi sulit untuk dipelajari karena materi yang disajikan lebih bersifat abstrak. Dalam mempelajari matematika, mahasiswa membutuhkan kemampuan-kemampuan matematis, diantaranya adalah kemampuan membaca bukti matematis. Membaca bukti matematis merupakan aktivitas menemukan kebenaran atau kesalahan serta memberikan alasan tiap langkah dari suatu proses pembuktian.

Salah satu mata kuliah pada Program Studi Pendidikan Matematika yang membutuhkan kemampuan membaca bukti matematis adalah Statistika Matematika. Statistika Matematika merupakan salah satu mata kuliah yang menekankan pada aspek penalaran deduktif/bukti matematis. Statistika Matematika termasuk salah satu mata kuliah yang dianggap sulit oleh mahasiswa (Marron, 1999). Mahasiswa mengalami kelemahan yang berkaitan dengan bukti matematis (Petocz & Smith, 2007). Untuk mengetahui kemampuan membaca bukti matematis mahasiswa pada mata kuliah Statistika Matematika, maka dilakukan penelitian dengan judul “Analisis Kemampuan Membaca bukti Matematis pada Mata Kuliah Statistika Matematika”.

2. Permasalahan

Adapun permasalahannya adalah “bagaimanakah kemampuan membaca bukti matematis mahasiswa pada mata kuliah statistika matematika?”.

3. Urgensi Masalah

Kemampuan membaca bukti matematis saat ini belum tampak dalam diri mahasiswa ketika mempelajari Mata Kuliah Statistika Matematika. Mereka belum dapat mengoptimalkan seluruh kemampuan matematisnya dalam belajar sehingga mereka cenderung menyerah dalam mengerjakan tugas ketika mengalami kesulitan. Melalui penelitian ini, diharapkan dapat menjadi suatu referensi serta wacana bagi para praktisi pendidikan matematika dalam upaya meningkatkan kemampuan membaca bukti matematis melalui pembelajaran yang sesuai.

II. KAJIAN TEORI

1. Kemampuan Membaca Bukti Matematis

Menurut Sumarmo (2011), kemampuan membaca bukti matematis merupakan kemampuan menemukan kebenaran atau kesalahan dari suatu pembuktian serta kemampuan memberikan alasan pada setiap langkah pembuktian. Dalam membaca bukti matematis, mahasiswa harus dapat mengemukakan gagasan matematika dari suatu teks, baik dalam bentuk lisan maupun tulisan dengan bahasanya sendiri.

Dengan demikian, seorang pembaca tidak hanya sekedar melafalkan teks, melainkan mengemukakan makna yang terkandung di dalam teks yang bersangkutan. Dengan kata lain, membaca bukti matematis merupakan serangkaian keterampilan untuk menyusun intisari informasi dari suatu teks (Sumarmo, 2003).

2. Statistika Matematika

Statistika matematika merupakan ilmu yang membahas tentang bagaimana sifat, dalil dan rumus-rumus statistika diturunkan, serta cara menciptakan model teoritis secara matematis (Suryana, 2015). Statistika matematika merupakan mata kuliah statistika teoritis yang diberikan kepada mahasiswa Program Studi Matematika dan Pendidikan Matematika. Mata kuliah ini diberikan pada mahasiswa tingkat ke-3. Untuk mempelajari mata kuliah ini, dibutuhkan kemampuan kalkulus dan statistika dasar sebagai mata kuliah prasyarat (Sumaryoto, 2008).

Mata kuliah ini terbagi atas 2 bagian, yaitu Statistika Matematika 1 dan Statistika Matematika 2 dalam semester yang berbeda. Mata kuliah ini mempelajari teori himpunan, kombinatorika, teori peluang, distribusi 1 peubah acak, distribusi 2 peubah acak, distribusi multivariat, dan pendugaan parameter (Sumaryoto, 2008).

III. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode kualitatif. Adapun subyek dalam penelitian ini adalah mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika di salah satu universitas swasta di Jakarta Timur yang mengontrak Mata Kuliah Statistika Matematika 2. Teknik sampling yang digunakan berupa *purposive sampling* sedangkan metode pengumpulan data yang digunakan adalah metode triangulasi.

IV. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

1. Analisis Hasil Dokumentasi

Berikut ini diberikan soal dan penyelesaian tes, serta beberapa hasil jawaban tes mahasiswa terkait dengan kemampuan membaca bukti matematis pada Mata Kuliah Statistika Matematika.

Soal Tes

Periksalah kebenaran tiap langkah pembuktian di bawah ini dan tuliskanlah konsep-konsep yang digunakannya.

Pernyataan:

Jika X dan Y adalah dua peubah acak berdistribusi normal yang memiliki fungsi pembangkit momen gabungan berbentuk:

$$M(t_1, t_2) = \exp\left[\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_2^2 t_2^2)\right]$$

maka $\text{cov}(X, Y) = \rho\sigma_1\sigma_2$.

Bukti:

Akan dicari terlebih dahulu nilai $E(X)$ dan $E(Y)$

$$\bullet \quad M(t_1, 0) = \exp\left[\mu_1 t_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2 t_1^2\right] \quad \dots (1)$$

$$\frac{\partial M(t_1, 0)}{\partial t_1} = (\mu_1 + \sigma_1^2 t_1) \exp\left[\mu_1 t_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2 t_1^2\right] \quad \dots (2)$$

$$\text{sehingga } E(X) = \left. \frac{\partial M(t_1, 0)}{\partial t_1} \right|_{t_1=0} = \mu_1 \quad \dots (3)$$

$$\bullet \quad M(0, t_2) = \exp\left[\mu_2 t_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 t_2^2\right] \quad \dots (4)$$

$$\frac{\partial M(0, t_2)}{\partial t_2} = (\mu_2 + \sigma_2^2 t_2) \exp\left[\mu_2 t_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 t_2^2\right] \quad \dots (5)$$

$$\text{sehingga } E(Y) = \left. \frac{\partial M(0, t_2)}{\partial t_2} \right|_{t_2=0} = \mu_2 \quad \dots (6)$$

Selanjutnya, akan dicari nilai $E(XY)$

$$\frac{\partial M(t_1, t_2)}{\partial t_1} = \left\{ \exp\left[\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_2^2 t_2^2)\right] \right\} \left\{ \mu_1 + \frac{1}{2}(2\sigma_1^2 t_1 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_2) \right\} \dots (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} &= \left\{ \exp\left[\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_2^2 t_2^2)\right] \right\} (\rho\sigma_1\sigma_2) + \left\{ \mu_1 + \frac{1}{2}(2\sigma_1^2 t_1 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_2) \right\} \\ &\quad \left\{ \exp\left[\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_2^2 t_2^2)\right] \right\} \left\{ \mu_2 + \frac{1}{2}(2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 + 2\sigma_2^2 t_2) \right\} \quad \dots (8) \end{aligned}$$

$$\text{sehingga } E(XY) = \left. \frac{\partial^2 M(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \right|_{t_1=t_2=0} = \rho\sigma_1\sigma_2 + \mu_1\mu_2 \quad \dots (9)$$

$$\text{Akibatnya, } \text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \rho\sigma_1\sigma_2 \quad \dots (10)$$

Terbukti.

Penyelesaian

Pernyataan:

Jika X dan Y adalah dua peubah acak berdistribusi normal yang memiliki fungsi pembangkit momen gabungan berbentuk:

$$M(t_1, t_2) = \exp\left[\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_2^2 t_2^2)\right]$$

maka $\text{cov}(X, Y) = \rho\sigma_1\sigma_2$.

Bukti:

Akan dicari terlebih dahulu nilai $E(X)$ dan $E(Y)$

$$\bullet \quad M(t_1, 0) = \exp\left[\mu_1 t_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2 t_1^2\right] \quad \dots (1)$$

Keterangan:

Konsep yang digunakan adalah substitusi $t_2 = 0$. Proses substitusi terbukti benar.

$$\frac{\partial M(t_1, 0)}{\partial t_1} = (\mu_1 + \sigma_1^2 t_1) \exp\left[\mu_1 t_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2 t_1^2\right] \quad \dots (2)$$

Keterangan:

Konsep yang digunakan adalah turunan parsial terhadap t_1 . Proses turunan parsial terbukti benar.

$$\text{sehingga } E(X) = \left. \frac{\partial M(t_1, 0)}{\partial t_1} \right|_{t_1=0} = \mu_1 \quad \dots (3)$$

Keterangan:

Konsep yang digunakan adalah dalil penurunan momen dari fungsi pembangkit momen dengan cara mensubstitusi $t_1 = 0$. Proses penguraianya terbukti benar.

$$\bullet \quad M(0, t_2) = \exp\left[\mu_2 t_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 t_2^2\right] \quad \dots (4)$$

Keterangan:

Konsep yang digunakan adalah substitusi $t_1 = 0$. Proses substitusi terbukti benar.

$$\frac{\partial M(0, t_2)}{\partial t_2} = (\mu_2 + \sigma_2^2 t_2) \exp\left[\mu_2 t_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 t_2^2\right] \quad \dots (5)$$

Keterangan:

Konsep yang digunakan adalah turunan parsial terhadap t_2 . Proses turunan parsial terbukti benar.

$$\text{sehingga } E(Y) = \left. \frac{\partial M(0, t_2)}{\partial t_2} \right|_{t_2=0} = \mu_2 \quad \dots (6)$$

Keterangan:

Konsep yang digunakan adalah dalil penurunan momen dari fungsi pembangkit momen dengan cara mensubstitusi $t_2 = 0$. Proses penguraianya terbukti benar.

Selanjutnya, akan dicari nilai $E(XY)$

$$\frac{\partial M(t_1, t_2)}{\partial t_1} = \left\{ \exp \left[\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \frac{1}{2} (\sigma_1^2 t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_2^2 t_2^2) \right] \right\} \left\{ \mu_1 + \frac{1}{2} (2\sigma_1^2 t_1 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_2) \right\} \dots (7)$$

Keterangan:

Konsep yang digunakan adalah turunan parsial terhadap t_1 .

Karena $M(t_1, t_2) = \exp \left[\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \frac{1}{2} (\sigma_1^2 t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_2^2 t_2^2) \right]$,

dengan menggunakan konsep:

$$f(g(x)) = e^{g(x)} \Rightarrow f'(g(x)) = e^{g(x)} g'(x) \text{ maka:}$$

$$\frac{\partial M(t_1, t_2)}{\partial t_1} = \left\{ \exp \left[\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \frac{1}{2} (\sigma_1^2 t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_2^2 t_2^2) \right] \right\} \left\{ \mu_1 + \frac{1}{2} (2\sigma_1^2 t_1 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_2) \right\}$$

Proses Turunan Parsial terbukti benar.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} &= \left\{ \exp \left[\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \frac{1}{2} (\sigma_1^2 t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_2^2 t_2^2) \right] \right\} (\rho\sigma_1\sigma_2) + \left\{ \mu_1 + \frac{1}{2} (2\sigma_1^2 t_1 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_2) \right\} \\ &\quad \left\{ \exp \left[\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \frac{1}{2} (\sigma_1^2 t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_2^2 t_2^2) \right] \right\} \left\{ \mu_2 + \frac{1}{2} (2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 t_2) \right\} \quad \dots (8) \end{aligned}$$

Keterangan:

Konsep yang digunakan adalah Turunan parsial kedua terhadap t_2 .

Karena

$$\frac{\partial M(t_1, t_2)}{\partial t_1} = \left\{ \exp \left[\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \frac{1}{2} (\sigma_1^2 t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_2^2 t_2^2) \right] \right\} \left\{ \mu_1 + \frac{1}{2} (2\sigma_1^2 t_1 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_2) \right\},$$

dengan menggunakan konsep:

$$f(g(x)) = e^{g(x)} \Rightarrow f'(g(x)) = e^{g(x)} g'(x) \quad \text{dan}$$

$$f(x) = u(x)v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \quad \text{maka:}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} &= \left\{ \mu_1 + \frac{1}{2} (2\sigma_1^2 t_1 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_2) \right\} \left\{ \exp \left[\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \frac{1}{2} (\sigma_1^2 t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_2^2 t_2^2) \right] \right\} \\ &\quad \left\{ \mu_2 + \frac{1}{2} (2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 + 2\sigma_2^2 t_2) \right\} + \left\{ \exp \left[\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \frac{1}{2} (\sigma_1^2 t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_2^2 t_2^2) \right] \right\} (\rho\sigma_1\sigma_2) \\ \frac{\partial^2 M(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} &= \left\{ \exp \left[\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \frac{1}{2} (\sigma_1^2 t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_2^2 t_2^2) \right] \right\} (\rho\sigma_1\sigma_2) + \left\{ \mu_1 + \frac{1}{2} (2\sigma_1^2 t_1 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_2) \right\} \\ &\quad \left\{ \exp \left[\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \frac{1}{2} (\sigma_1^2 t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_2^2 t_2^2) \right] \right\} \left\{ \mu_2 + \frac{1}{2} (2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 + 2\sigma_2^2 t_2) \right\} \end{aligned}$$

Proses Turunan Parsial terbukti ada yang salah.

$$\text{sehingga } E(XY) = \frac{\partial^2 M(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \Big|_{t_1=t_2=0} = \rho\sigma_1\sigma_2 + \mu_1\mu_2 \quad \dots (9)$$

Keterangan:

Dengan menggunakan konsep dalil penurunan momen dari fungsi pembangkit

momen, yaitu: $E(XY) = \frac{\partial^2 M(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$ untuk $t_1 = t_2 = 0$, maka:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \Big|_{t_1=t_2=0} &= \left\{ \exp \left[\mu_1(0) + \mu_2(0) + \frac{1}{2} (\sigma_1^2(0)^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2(0)(0) + \sigma_2^2(0)^2) \right] \right\} (\rho\sigma_1\sigma_2) + \left\{ \mu_1 + \frac{1}{2} (2\sigma_1^2(0) + 2\rho\sigma_1\sigma_2(0)) \right\} \\ &\quad \left\{ \exp \left[\mu_1(0) + \mu_2(0) + \frac{1}{2} (\sigma_1^2(0)^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2(0)(0) + \sigma_2^2(0)^2) \right] \right\} \left\{ \mu_2 + \frac{1}{2} (2\rho\sigma_1\sigma_2(0) + 2\sigma_2^2(0)) \right\} \\ &= \left\{ \exp[0] \right\} (\rho\sigma_1\sigma_2) + \left\{ \mu_1 + 0 \right\} \left\{ \exp[0] \right\} \left\{ \mu_2 + 0 \right\} \\ &= (1)(\rho\sigma_1\sigma_2) + \mu_1(1)\mu_2 \\ &= \rho\sigma_1\sigma_2 + \mu_1\mu_2 \end{aligned}$$

Proses penguraian terbukti benar.

$$\text{Akibatnya, } \text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \rho\sigma_1\sigma_2 \quad \dots (10)$$

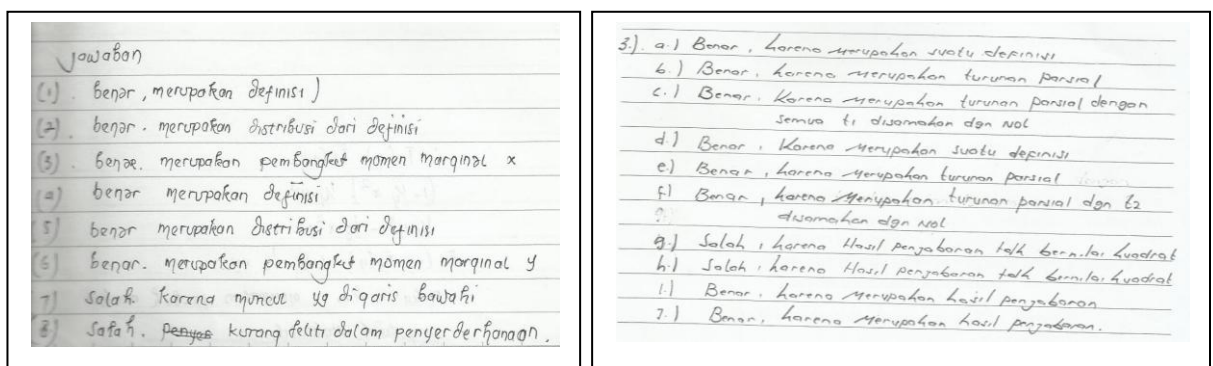
Keterangan:

Dengan menggunakan konsep dalil perumusan kovarians umum, maka

$$\begin{aligned}\text{cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= (\rho\sigma_1\sigma_2 + \mu_1\mu_2) - \mu_1\mu_2 \\ &= \rho\sigma_1\sigma_2\end{aligned}$$

Proses penguraian terbukti benar.

Setelah diuraikan mengenai soal tes Mata Kuliah Statistika Matematika yang berkaitan dengan kemampuan membaca bukti matematis berikut penyelesaiannya, selanjutnya adalah menganalisis jawaban tes dari beberapa mahasiswa. Adapun uraiannya adalah sebagai berikut.



Gambar 1. Jawaban Tes Membaca Bukti Mahasiswa 1 (kiri) dan Mahasiswa 2 (kanan)

Untuk jawaban tes Mahasiswa 1, terlihat bahwa pemeriksaan kebenaran pembuktian pada semua langkah beserta penulisan konsep yang digunakan tidak lengkap, bahkan ada beberapa langkah yang kurang tepat dan tidak selesai. Untuk langkah ke-1, 2, 3, 4, 5, 6, dan 8, pemeriksaan kebenaran pembuktian sudah tepat, tetapi penulisan konsep yang digunakan tidak lengkap dan ada beberapa yang kurang tepat. Penjelasan secara teknis (secara matematika) pada langkah-langkah tersebut tidak ada dan penjelasan secara statistika pun hanya beberapa langkah yang mendekati benar (langkah ke-3 dan 6), sedangkan langkah lainnya dinilai kurang tepat (langkah 1, 2, 4, 5, dan 8). Untuk langkah ke-7, pemeriksaan kebenaran pembuktian dinilai kurang tepat dan penulisan konsep yang digunakan pun tidak tepat. Untuk langkah ke-8, meskipun hasil pemeriksaan kebenaran pembuktian dinilai tepat, tetapi tidak dituliskan hasil yang sebenarnya. Hal ini dikarenakan hasil yang diperoleh pada langkah tersebut salah. Untuk langkah ke-9 dan 10, mahasiswa

1 tidak memeriksa kebenaran pembuktian dan penulisan konsep yang digunakan, sehingga jawabannya tidak ada.

Untuk jawaban tes Mahasiswa 2 hampir sama kasusnya dengan Mahasiswa 1, terlihat bahwa pemeriksaan kebenaran pembuktian pada semua langkah beserta penulisan konsep yang digunakan tidak lengkap, bahkan ada beberapa langkah yang kurang tepat. Pada jawaban Mahasiswa 2, terdapat kesalahan penulisan *item* langkah yang seharusnya pakai nomor, tetapi menggunakan huruf. Untuk langkah ke-1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, dan 10, pemeriksaan kebenaran pembuktian sudah tepat, tetapi penulisan konsep yang digunakan tidak lengkap dan ada beberapa yang kurang tepat. Sebagian langkah hanya diuraikan secara teknis (secara matematika) saja tanpa dilengkapi dengan penjelasan secara statistika. Untuk langkah ke-8, meskipun hasil pemeriksaan kebenaran pembuktian dinilai tepat, tetapi tidak dituliskan hasil yang sebenarnya. Hal ini dikarenakan hasil yang diperoleh pada langkah tersebut salah. Untuk langkah ke-7, pemeriksaan kebenaran pembuktian dinilai kurang tepat seperti halnya jawaban tes Mahasiswa 1 dan penulisan konsep yang digunakan pun tidak tepat.

3) a) Pernyataan :

Dik: X dan Y adalah 2 Peubah acak berdistribusi normal yang memiliki fungsi pembangkit momen gabungan berbentuk :

$$M(t_1, t_2) = \exp \left[\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \frac{1}{2} (\sigma_1^2 t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_2^2 t_2^2) \right]$$

maka $\text{cov}(X, Y) = \rho\sigma_1\sigma_2$

Bukti :

Akan dicari terlebih dahulu nilai $E(X)$ dan $E(Y)$

- $M(t_1, 0) = \exp \left[\mu_1 t_1 + \frac{1}{2} \sigma_1^2 t_1^2 \right] \dots (1)$ benar, dan mensubstitusi $t_2 = 0$ dari $M(t_1, t_2)$
- $\frac{\partial M(t_1, 0)}{\partial t_1} = (\mu_1 + \sigma_1^2 t_1) \exp \left[\mu_1 t_1 + \frac{1}{2} \sigma_1^2 t_1^2 \right] \dots (2)$ benar, dengan turunan parsial dari $M(t_1, 0)$ terhadap t_1
- sehingga $E(X) = \left. \frac{\partial M(t_1, 0)}{\partial t_1} \right|_{t_1=0} = \mu_1 \dots (3)$ benar, dan mensubstitusi $t_1 = 0$ ke hasil turunan parsial $M(t_1, 0)$ terhadap t_1
- $M(0, t_2) = \exp \left[\mu_2 t_2 + \frac{1}{2} \sigma_2^2 t_2^2 \right] \dots (4)$ benar, dan mensubstitusi $t_1 = 0$ dari $M(t_1, t_2)$
- $\frac{\partial M(0, t_2)}{\partial t_2} = (\mu_2 + \sigma_2^2 t_2) \exp \left[\mu_2 t_2 + \frac{1}{2} \sigma_2^2 t_2^2 \right] \dots (5)$ benar, dengan turunan parsial dari $M(0, t_2)$ terhadap t_2
- sehingga $E(Y) = \left. \frac{\partial M(0, t_2)}{\partial t_2} \right|_{t_2=0} = \mu_2 \dots (6)$ benar, dan mensubstitusi $t_2 = 0$ ke hasil turunan parsial $M(0, t_2)$ terhadap t_2
- Selanjutnya, akan dicari nilai $E(XY)$ (7) Benar dengan turunan parsial dari $M(t_1, t_2)$
- $\frac{\partial^2 M(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \left(\exp \left[\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \frac{1}{2} (\sigma_1^2 t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_2^2 t_2^2) \right] \right) \left(\rho\sigma_1\sigma_2 + \frac{1}{2} (2\rho\sigma_1\sigma_2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_2) \right) \dots (7)$ terhadap t_1
- $\frac{\partial^2 M(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \left(\exp \left[\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \frac{1}{2} (\sigma_1^2 t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_2^2 t_2^2) \right] \right) \left(\rho\sigma_1\sigma_2 + \frac{1}{2} (2\rho\sigma_1\sigma_2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_2) \right) \dots (8)$ salah, ada variabel t_2
- kurang dari turunan parsial dari $M(t_1, t_2)$ terhadap t_1 dahulu, kemudian hasilnya di turunkan lagi terhadap t_2
- sehingga $E(XY) = \left. \frac{\partial^2 M(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \right|_{t_1=0, t_2=0} = \rho\sigma_1\sigma_2 + \mu_1\mu_2 \dots (9)$ benar, dengan mensubstitusi $t_1 = t_2 = 0$ dari hasil $\frac{\partial^2 M(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$
- Akibatnya, $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \rho\sigma_1\sigma_2 \dots (10)$ benar, dengan menggunakan definisi kovarian

Gambar 2. Jawaban Tes Membaca Bukti Mahasiswa 3

Untuk jawaban tes Mahasiswa 3, terlihat bahwa pemeriksaan kebenaran pembuktian pada langkah ke-1, 2, 4, dan 5 beserta penulisan konsep yang digunakan sudah lengkap dan tepat; sedangkan untuk langkah ke-3, 6, 7, 8, 9, dan 10, pemeriksaan kebenaran pembuktian sudah tepat, tetapi penulisan konsep yang digunakan tidak lengkap. Mahasiswa 3 hanya menguraikan secara teknis saja (secara matematika), tidak dilengkapi dengan konsep Statistiknya. Untuk langkah ke-8, meskipun hasil pemeriksaan kebenaran pembuktian dinilai tepat, tetapi tidak dituliskan hasil yang sebenarnya. Hal ini dikarenakan hasil yang diperoleh pada langkah tersebut salah. Secara keseluruhan, jawaban tes Mahasiswa 3 lebih baik daripada jawaban tes Mahasiswa 1 dan 2.

2. Analisis Hasil Observasi dan Wawancara

Berdasarkan hasil observasi dan wawancara pada mahasiswa yang mengontrak Mata Kuliah Statistika Matematika di salah satu universitas swasta di Jakarta Timur terkait dengan kemampuan membaca bukti matematis, terlihat bahwa beberapa mahasiswa masih mengalami kesulitan dalam memahami alur suatu pembuktian, termasuk di dalamnya kesulitan dalam pemeriksaan kebenaran pembuktian beserta penulisan konsep yang digunakan. Salah satu faktor yang mengakibatkan hal tersebut adalah masih lemahnya konsep mata kuliah prasyarat (Kalkulus dan Statistika Dasar).

Untuk Mata Kuliah Kalkulus, beberapa mahasiswa mengakui bahwa mereka masih lemah dalam penguasaan konsep turunan parsial, apalagi dalam menyelesaikan soal yang berkaitan dengan turunan parsial yang lebih kompleks. Mereka kadangkala kebingungan ketika menurunkan suatu variabel secara parsial jika jumlah variabel dalam fungsi tersebut tergolong banyak. Mereka pun masih lemah dalam menerapkan teknik turunan dalam penyelesaian soal turunan, seperti konsep turunan pada perkalian dan pembagian dua fungsi atau lebih, serta konsep aturan rantai dalam turunan.

Untuk Mata Kuliah Statistika Dasar, beberapa mahasiswa mengakui bahwa mereka masih lemah dalam konsep ekspektasi, terutama mengenai momen. Mereka sering tertukar antara konsep secara definisi dan dalil; serta masih kurangnya pemahaman mahasiswa mengenai kaitan antara konsep ekspektasi, rata-rata, varians, dan kovarian.

Untuk memperkuat analisis, peneliti juga mengobservasi dan mewawancarai salah satu dosen pengampu Mata Kuliah Statistika Matematika. Dosen mengakui bahwa model pembelajaran yang digunakan masih konvensional yang lebih menekankan pada aktivitas dosen dalam menjelaskan materi, tanya jawab, serta pendalaman materi melalui pengerjaan dan pembahasan soal latihan. Dosen mengakui pula bahwa penguasaan beberapa mahasiswa terhadap mata kuliah prasyarat masih lemah, sehingga seringkali dosen harus *mereview* materi tersebut. Dengan *mereview* materi prasyarat, mahasiswa dapat lebih memahami materi Statistika Matematika yang seringkali membutuhkan kemampuan membaca bukti matematis.

Berdasarkan uraian di atas terlihat bahwa kemampuan membaca bukti matematis mahasiswa pada Mata Kuliah Statistika Matematika secara umum masih kurang baik.

V. KESIMPULAN, SARAN DAN REKOMENDASI

1. Kesimpulan

Kemampuan membaca bukti matematis mahasiswa pada Mata Kuliah Statistika Matematika tergolong masih kurang baik. Hal ini terlihat dari beberapa mahasiswa masih mengalami kesulitan dalam memahami alur suatu pembuktian, termasuk di dalamnya kesulitan dalam pemeriksaan kebenaran pembuktian beserta penulisan konsep yang digunakan.

2. Saran

Dalam penelitian ini disarankan untuk melakukan analisis secara *mixed* (kuantitatif dan kualitatif) agar analisis yang dihasilkan lebih akurat dan mendalam.

3. Rekomendasi

Melalui penelitian ini, dosen pengampu mata kuliah Statistika Matematika direkomendasikan untuk mencoba menerapkan model pembelajaran yang cocok untuk meningkatkan kemampuan mahasiswa dalam membaca bukti matematis.

DAFTAR PUSTAKA

- Herrhyanto, N. & Tuti G. (2009). *Pengantar Statistika Matematis*. Bandung: Yrama Widya.
- Marron, J.S. (1999). *Effective Writing in Mathematical Statistics*. Statistica Neerlandica, Vol. 53, nr. 1, pp. 68-75.
- Petocz, P. & N. Smith (2007). *Materials for Learning Mathematical Statistics*. Sydney: University of Technology.
- Sugiyono (2011). *Metode Penelitian Kombinasi (Mixed Methods)*. Bandung: Alfabeta.
- Sumarmo, U. (2003). *Pembelajaran Keterampilan Membaca Matematika pada Siswa Sekolah Menengah*. Disampaikan pada Seminar Nasional Pendidikan MIPA di FPMIPA UPI.
- Sumarmo, U. (2011). *Advanced Mathematical Thinking dan Habit of Mind Mahasiswa (Bahan Kuliah)*. PPS UPI Bandung: tidak diterbitkan.

- Sumaryoto, dkk. (2008). *Pedoman Operasional Tahun Akademik 2008/2009*. Jakarta: UNINDRA Press.
- Suryana, A. (2015). *Diktat Mata Kuliah Biostatistika*. Jakarta: UNINDRA Press.